شرح بسيط للقيم الذاتية Eigenvalues والمتجهات الذاتيه Eigenvectors

قوانين الحل :

القانون العام $A_x = \lambda_x$

قانون لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalues

$$|A - \lambda I| = 0$$

أو

$$|\lambda I - A| = 0$$

قانون لإيجاد المتجهات الذاتيه Eigenvectors

$$|A - \lambda I|x = 0$$

❖ Find Eigenvalues and Eigenvectors of a 2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

خطوات الحل لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalue:

-1 لإيجاد دلتا مع λ I

I تعني المتطابقة Identity

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\lambda I = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

نحول المصفوفة الى المحددة وتسمى المعادلة المميزة

Characteristic Equation

لتوضيح حل المحددة :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a * d) - (b * c)$$

مع الانتباه للإشارات

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 2) - (6)(3)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 5\lambda + 10 - 18$$

طريقة حل المعادلة البحث عن عددين
ضربهما هو -8 ومجموعهما -7 ناتج

العددين هما +1 و -8

$$=\lambda^2-7\lambda-8$$

$$\lambda^2-7\lambda-8=0$$

المعادلة المميزة

Characteristic Equation

$$(\lambda+1)(\lambda-8)=0$$

$$(\lambda+1)=0 \implies \lambda=-1$$

$$(\lambda-8)=0 \implies \lambda=+8$$

The eigenvalues are $\lambda=-1$ *or* $\lambda=8$

قانون لإيجاد المتجهات الذاتيه Eigenvectors

$$|\lambda I-A|x=0$$

Put $\lambda=-1$

نأخذ القيمة $\lambda=-1$ لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة :

$$\begin{pmatrix}\lambda-5 & 3\\ 6 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

نعوض بدل الدلتا -1

$$\begin{pmatrix}(-1)-5 & 3\\ 6 & (-1)-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2+R_1$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثاني مع تغيير الاشارة

$$-6x_1+3x_2=0$$

$$-6x_1=-3x_2$$

نعوض في أحد المتغيرات x_1 بأي رقم ماعدا 0

$$x_1=1$$

$$(-6)(1)=-3x_2$$

بقسمة الطرفين على -3

$$\frac{-6}{-3} = \frac{-3x_2}{-3}$$

$$x_2 = 2$$

An eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

نأخذ القيمة الذاتية $\lambda = 8$ لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة :

Put $\lambda = 8$

$$|\lambda I - A|x = 0$$

نعوض بدل الدلتا 8

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 - 5 & 3 \\ 6 & 8 - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثانى مع تغيير الاشارة

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

نعوض في أحد المتغيرات x_2 بأي رقم ماعدا 0

$$3x_1 = -3x_2$$

$$x_2 = -1$$

$$3x_1 = -3(1)$$

بقسمة الطرفين على 3

$$\frac{3x_1}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$x_1 = 1$$

An eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$